BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2010***

О СВОБОДНЫХ АЛГЕБРАХ МЕНГЕРА ФИКСИРОВАННОГО РАНГА

О.М.МАМЕДОВ, А.МОЛХАСИ
Бакинский Государственный Университет
Okmamedov@gmail.com, Molkhasi@gmail.com

Для конечнопорожденной свободной алгебры Менгера ранга n показано существование счетной цепи свободных подалгебр. Далее показано как гиперподстановки продолжаются до эндоморфизмов этих алгебр. Гиперподстановки задают гипертождества; отсюда выводится относительная жесткость некоторых многообразий.

Рассматриваются алгебры, все операционные символы которых имеют одну и ту же арность n, т.е. алгебры n-арного типа. Пусть $\tau = (f_i \mid i \in I)$ есть такой n-арный тип. Через $W_\tau(X_n)$ обозначается множество всех n-арных термов типа τ («слов») над n-элементным множеством $X_n := \{x_0, ..., x_{n-1}\}$ переменных. Множество $W_\tau(X_n)$ естественным образом наделяется структурой алгебры типа τ, а именно, если положить

$$\bar{f}_i : [W_\tau(X_n)]^n \to W_\varepsilon(X_n) \ ,$$

где

$$(t_0, ..., t_{n-1}) \mapsto \bar{f}_i\,(t_0, ..., t_{n-1}) := f\,(t_0, ..., t_{n-1})\,,$$

то $W_\tau(X_n)$ становится абсолютно свободной алгеброй типа τ («алгебра слов»), свободно порожденной множеством X_n:

$$\mathbb{F}_\tau(X_n) := (W_\tau(X_n), (\overline{f_i} \mid i \in I))\,.$$

1^0. Свободные алгебры Менгера

В работе К.Денеке и Г.Жампачона [1], системой обозначений которой мы в основном пользуемся, рассматривается некоторое подмножество в $W_\tau(X_n)$, так называемых, *полных термов*, определяемых индуктивно. Пусть $H_n \subset n^n$ есть множество всех отображений $\{0, ..., n-1\} = n \to n$ с непустым образом.

Определение 1 [1]. (a) Пусть $s \in H_n$ - произвольная функция и пусть

f_i - операционный символ типа τ. Тогда $f_i\left(x_{s(0)},\dots,x_{s(n-1)}\right)$ есть *полный* терм типа τ.

(b) Если $t_0,\dots,t_{n-1}$ - полные термы типа τ, то $f_i(t_0,\dots,t_{n-1})$ есть *полный* терм типа τ.

Пусть $W_\tau^F(X_n)$ есть множество всех n-арных полных термов типа τ; $W_\tau^F(X_n)\subset W_\tau(X_n)$. По построению это множество полных термов замкнуто относительно всех операций $\overline{f_i}$. Поэтому множество полных термов является подалгеброй абсолютно свободной алгебры $\mathbf{F}_\tau(X_n)$, порожденной n-элементным множеством. Помимо сигнатурных операций на абсолютно свободной алгебре (и ее подалгебрах) можно задать операцию суперпозиции; напомним определение суперпозиции для полных термов, введенное в [1].

Определение 2 [1]. (a)

$$S^n(f_i(x_{s(0)},\dots,x_{s(n-1)}),t_0,\dots,t_{n-1}):=f_i(t_{s(0)},\dots,t_{s(n-1)}),\qquad \text{(b)}$$

$$S^n(f_i(r_0,\dots,r_{n-1}),t_0,\dots,t_{n-1}):=f_i(S^n(r_0,t_0,\dots,t_{n-1}),\dots,S^n(r_{n-1},t_0,\dots,t_{n-1})).$$

Тогда получается алгебра $cl_F\tau:=(W_\tau^F(X_n),S^n)$ с одной $(n+1)$-арной операцией, являющейся, как увидим ниже, *алгеброй Менгера ранга* n.

В [1] индукцией доказано, что $cl_F\tau$ удовлетворяет тождеству суперассоциативности:

$$S^n(x_0,S^n(y_0,x_1,\dots,x_n),\dots,S^n(y_{n-1},x_1,\dots,x_n))=S^n(S^n(x_0,y_0,\dots,y_{n-1}),x_1,\dots,x_n),$$

где x_i,y_j - переменные и S^n - $(n+1)$-арный операционный символ. Очевидно, что $cl_F\tau$ порождается множеством

$$Fund_\tau:=\{f_i(x_{s(0)},\dots,x_{s(n-1)})\mid i\in I,\ s\in H_n\}$$

так называемых, *фундаментальных* термов.

Мы пользуемся определением алгебры Менгера, данным в широко известной работе Б.М.Шайна и В.С.Трохименко [2].

Определение 3 [2]. Алгебра $\mathbf{M}:=(M,S^n)$ с одной $(n+1)$-арной операцией S^n называется *алгеброй Менгера ранга* n, если она удовлетворяет тождеству суперассоциативности.

Пусть V - многообразие всех алгебр с одной $(n+1)$-арной операцией, удовлетворяющей тождеству суперассоциативности, т.е. многообразие всех алгебр Менгера ранга n. Обозначим свободную в V алгебру, свободно порожденную множеством $Y:=\{y_j\mid j\in J\}$ через $\mathbf{F}_V(Y)$. Первым основным результатом в [1] является

Теорема 1 [1]. Алгебра $cl_F\tau$ является свободной алгеброй в многообразии V алгебр Менгера ранга n, свободно порожденной множеством $Y := \{y_j \mid j \in J = \{(i,s) \mid i \in I,\, s \in H_n\}\}$.

Следует отметить, что множество $W_\tau^F(X_n)$ получается посуществу из множества $W_\tau(X_n)$ выбрасыванием порождающего множества переменных X_n ("нулевого яруса") и оставшееся множество $W_\tau^F(X_n)$ оказывается замкнутым относительно $(n+1)$-арной (менгеровской) операции S^n. Точно так же, если из алгебры $cl_F\tau$ выбросить порождающее множество $Fund_\tau$ фундаментальных термов ("первый ярус"), то оставшееся множество *(1)-полных термов* (обозначим его через $W_\tau^{(1)F}(X_n)$) вновь окажется замкнутым относительно типовых операций $\tau = (f_i \mid i \in I)$ и $(n+1)$-арной (менгеровской) операции суперпозиции S^n. Поэтому, аналогом предложения 1 из [1] служит следующее утверждение, для формулировки которого примем такое обозначение: $cl_F^{(1)}\tau = (W_\tau^{(1)F}(X_n);\, S^n)$; ясно, что $cl_F^{(1)}\tau$ является подалгеброй в $cl_F\tau$.

Предложение 1. Алгебра $cl_F^{(1)}\tau$ удовлетворяет тождеству суперассоциативности.

Доказательство проводится индукцией по сложности термов. Такой же индукцией мы доказываем аналог вышеприведенной теоремы 1 для следующего "яруса".

Теорема 2. Алгебра $cl_F^{(1)}\tau$ является свободной алгеброй, свободно порожденной некоторым конечным множеством, в многообразии V всех алгебр Менгера ранга n .

Можно продолжить этот процесс далее, каждый раз выбрасывая порождающее множество. Эти порождающие множества имеют увеличивающиеся на каждом этапе ("ярусе") конечные мощности. В итоге получаем счетную убывающую цепь свободных в V подалгебр: $cl_F\tau \geq cl_F^{(1)}\tau \geq cl_F^{(2)}\tau \geq \dots$.
Теперь предыдущую теорему можно распространить так.

Теорема 3. Для каждого целого $k \geq 0$ алгебра

$$cl_F^{(k)}\tau = (W_\tau^{(k)F}(X_n); S^n)$$

(*(k)-полных термов*) является свободной алгеброй, свободно порожденной в многообразии V некоторым конечным множеством.

2^0. Гиперподстановки

Модифицируя понятие гиперподстановки, К.Денеке и П.Жампачон ввели понятие полной гиперподстановки. Обобщением последнего является следующее

Определение 4. *(1)-полной гиперподстановкой* σ *типа* τ назовем любое отображение $\sigma : \{f_i \mid i \in I\} \to W_\tau^{(1)F}(X_n)$.

Ясно, что σ можно продолжить до отображения

$$\hat{\sigma} : W_\tau^{(1)F}(X_n) \to W_\tau^{(1)F}(X_n),$$

полагая по индукции $\hat{\sigma}[f_i(t_0,...,t_{n-1})] := S^n(\sigma(f_i), \hat{\sigma}[t_0],..., \hat{\sigma}[t_{n-1}])$. Пусть $Hyp_\tau^{(1)F}$ есть множество всех (1)-полных гиперподстановок. На этом множестве $Hyp_\tau^{(1)F}$ естественным образом определяется бинарная операция $\sigma_1 * \sigma_2 := \hat{\sigma}_1 \circ \sigma_2$, где $\circ$ обозначает обычную композицию функций. Итак, это множество образует полугруппу $(Hyp_\tau^{(1)F}; *)$. Так же, как в предложении 2 из [1], индукцией по сложности терма доказываем

Предложение 2. Для любого $\sigma \in Hyp_\tau^{(1)F}$ отображение $\hat{\sigma}$ является эндо-морфизмом свободной алгебры $cl_F^{(1)}\tau = (W_\tau^{(1)F}(X_n); S^n)$.

Естественно, *(k)-полной гиперподстановкой* будет любое отображение $\sigma : \{f_i \mid i \in I\} \to W_\tau^{(k)F}(X_n)$ и поэтому предложение 2 можно распространить так: для любого $\sigma \in Hyp_\tau^{(k)F}$ отображение $\hat{\sigma}$ является эндоморфизмом свободной алгебры $cl_F^{(k)}\tau$.

Для произвольного многообразия V типа τ пусть $Id^{(k)F}V := W_\tau^{(k)F}(X_n)^2 \bigcap IdV$ есть множество всех тождеств многообразия V, состоящих из n-арных (k)-полных термов. Обобщением предложения 4 из [1] является

Предложение 3. $Id^{(k)F}V$ является конгруэнцией алгебры $cl_F^{(k)}\tau$.

Доказательство основано на индукции. Мы рассмотрим общий случай; пусть $t = f_i(l_0,...,l_{n-1}) \in W_\tau^{(k)F}(X_n)$ и пусть для всех l_j $(0 \le j \le n-1)$ уже доказаны тождества $S^n(l_j,t_0,...,t_{n-1}) = S^n(l_j,r_0,...,r_{n-1}) \in Id^{(k)F}V)$. Тогда

$$S^n(f_i(l_0,...,l_{n-1}),t_0,...,t_{n-1}) = f_i(S^n(l_0,t_0,...,t_{n-1}),...,S^n(l_{n-1},t_0,...,t_{n-1})) =$$
$$= f_i(S^n(l_0,r_0,...,r_{n-1}),...,S^n(l_{n-1},r_0,...,r_{n-1})) = .$$

Теперь для доказательства импликации

$$t = r \in Id^{(k)F}V \quad \Rightarrow \quad S^n(t,r_0,...,r_{n-1}) = S^n(r,r_0,...,r_{n-1}) \in Id^{(k)F}V$$

достаточно заметить, что конгруэнция, определяемая тождествами многообразия, является вполне инвариантной конгруэнцией на абсолютно свободной алгебре $\mathbf{F}_\tau(X_n)$.

(k)-полные гиперподстановки позволяют определить $(k)F-$гипертождества в любом многообразии V типа τ; напомним, что гипертождества были введены в одной из работ У.Тейлора (1981г.).

Определение 5. Пусть V - многообразие типа τ и пусть $Id^{(k)F}V$ - множество всех тождеств многообразия V, состоящих из n-арных (k)-полных термов. Тогда тождество вида $s = t \in Id^{(k)F}V$ называется $n-(k)F$ - *гипертождеством* в V, если $\hat{\sigma}[s] = \hat{\sigma}[t] \in Id^{(k)F}V$ для всех $\sigma \in Hyp_{\tau}^{(k)F}$.

Определение 6. Многообразие V назовем $n-(k)F$ - *жестким*, если всякое тождество из множества $Id^{(k)F}V$ выполняется в V как некоторое $n-(k)F$ -гипертождество.

Предложение 4. Если $Id^{(k)F}V$ является вполне инвариантной конгруэнцией алгебры $cl_F^{(k)}\tau$, то многообразие V является $n-(k)F$ -жестким.

Доказательство непосредственно следует из предложения 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Denecke K., Jampachon P. Clones of full terms// Algebra and Discrete Math., 2004, v.4, p.1-11.
2. Schein B.M., Trochimenko V.S. Algebras of multiplace functions // Semigroup Forum, 1979, v.17, p. 1-64.

QEYD OLUNMUŞ RANQLI SƏRBƏST MENGER CƏBRLƏRİ HAQQINDA

O.M.MƏMMƏDOV, Ə.MOLXASİ

XÜLASƏ

n ranqlı sonlu doğurulanlı sərbəst Menger cəbri üçün hesabi sayda sərbəst altcəbrlərin varlığı göstərilmişdir. Sonra hiperəvəzləmələrin bu cəbrlərin endomorfizmilərinə qədər davam edilməsi göstərilmişdir. Hiperəvəzləmələr hipereynilikləri təyin edir; buradan da bəzi çoxobrazlıların (nisbi) şərtliyi alınır.

ON FREE MENGER ALGEBRAS OF FIXED RANK

O.M.MAMMADOV, A.MOLKHASI

SUMMARY

In the present paper, we show that a finitely generated free Menger algebra of rank n has countably many free subalgebras. It is shown that hypersubstitutions can be generalized up to endomorphisms. Hypersubstitutions define hyperidentities and this implies relative solidity of some varieties.